الحلقات البوليانية :

- نقطة البداية لهذا الفصل ستكون الشبكة التوزيعية والمتممة أو شبكة بول، وسنبين أنه بناء شبكة بول يمكن أن نبني ضمن الحلقة وهي الحلقة بول (الحلقة والحدية محققة: $x^2=x$ من أجل أي x).

- ولعدنا أن نبرهن هذا التكافؤ جاء موضوع هذا الفصل ~~...~~ سنخصص لدراسة الخواص والمفاهيم الواردة في الفصل السابق ولكن بلغة الحلقات البوليانية، مثل المورفيزمات، الحلقات الجزئية، المثاليات، ... الخ.

$\boxed{1}$ - شبكة بول:

دورة تعريف: نسمي الشبكة التي تكون بآن واحد توزيعية ومتممة بشبكة بول.

- نلاحظ أن ~~...~~ شبكة بول E تملك دوماً العنصر الأصغر 0 والعنصر الأكبر 1 وأن أي عنصر x منها يملك متمم واحد فقط x' بحيث يكون:

$$x \vee x' = 1 \quad , \quad x \wedge x' = 0$$

- ويكون أيضاً من أجل أي مجال $[a,b]$ أي عنصر x من المجال $[a,b]$ يملك متمم نسبي واحد فقط من $[a,b]$ وهو: $y=(a \vee x') \wedge b$

- مثال: كل شبكة $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ هي شبكة بول.

- بعض الخواص البسيطة لشبكة بول:

$0'=1$

$1'=0$

- من أجل أي x من E فإن $(x')'=x$

- من أجل أي عنصرين $x,y \in E$ فإن:

$$(x \wedge y)' = x' \vee y' \quad \text{و} \quad (x \vee y)' = x' \wedge y'$$

$$(x\wedge y)\wedge(x'\vee y') = (x\wedge y\wedge x')\vee(x\wedge y\wedge y') = (0\wedge y)\vee(x\wedge 0) = 0\vee 0 = 0$$

$$(x\wedge y)\vee(x'\vee y') = (x\vee x'\vee y')\wedge(y\vee x'\vee y') = (1\vee y')\wedge(1\vee x') = 1\wedge 1 = 1$$

$$\Rightarrow (x\wedge y)' = x'\vee y'$$

$$(x\wedge y)' = x'\vee y' \Rightarrow (x'\wedge y')' = (x')'\vee(y')' \Rightarrow (x'\wedge y')' = x\vee y$$

نستبدل x بـ x' و y بـ y'

$$= x'\wedge y'$$
$$= (x\vee y)'$$

- بالتالي: $(x\vee y)' = x'\wedge y'$ وتسمى العلاقتين الأخيرتين بقانوني دي مورغان.

- الجمع : لنعرف على حلقة بول عملية جديدة هي الجمع :

$$\boxed{x+y=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)} \quad ---- \; (1)$$

- مثال : من الشبكة $(P(E), \subseteq)$ عملية الجمع فيها هي عبارة عن الفرق التناظري والذي نكتب بالشكل :

$$X\Delta Y=(X\cap C_Y)\cup(C_X\cap Y)$$

ويمكن كتابة العلاقة (1) بالشكل :

$$x+y=[(x\wedge y')\vee x']\wedge[(x\wedge y')\vee y]$$

$$=(x\vee x')\wedge(y'\vee x')\wedge(x\vee y)\wedge(y'\vee y)$$

$$=1\wedge(y'\vee x')\wedge(x\vee y)\wedge 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x+y=(x\vee y)\wedge(x'\vee y')} \quad ---- \; (2)$$

من (1) يمكن أن نكتب :

$$(x+y)'=(x'\vee y)\wedge(x\vee y') \quad --- \; (1')$$

$$(x+y)'=(x\wedge y)\vee(x'\wedge y') \quad --- \; (2')$$

* إن عملية الجمع تحقق الخواص التالية :
- تبديلية (واضح).
- تقبل 0 كعنصر حيادي فيها.

$$x+0=(x\wedge 0')\vee(x'\wedge 0)=(x\wedge 1)\vee 0=x\vee 0=x$$

- كل عنصر هو نظير نفسه.

$$x+x=(x\wedge x')\vee(x'\wedge x)=0\vee 0=0$$

- تجميعية : $\forall x,y,z\in E$ فإن :

$$(x+y)+z=[(x+y)\wedge z']\vee[(x+y)'\wedge z]$$

$$=\{[(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)]\wedge z'\}\vee\{[(x\wedge y)\vee(x'\wedge y')]\wedge z\}$$

$$=(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y\wedge z)\vee(x'\wedge y'\wedge z)$$

ونلاحظ أن هذه العبارة لا تتغير إذا بدلنا x بـ z ، z بـ x ومنه نجد :

$$(x+y)+z=(z+y)+x=x+(y+z)$$

أي أن عملية الجمع تجميعية.

$x+1 = x'$

$$x+1 = (x\wedge 1')\vee(x'\wedge 1) = (x\wedge 0)\vee(x') = 0\vee x' = x'$$

* بناء الحلقة :

- ملاحظة : كل شبكة بول تكون حلقة تبديلية وواحدية من أجل العمليتين :

• $x+y$ (المعرفة سابقاً).

• $x.y = x\wedge y$

بالإضافة الى ذلك فإنه في هذه الحلقة يكون الضرب جامداً أي أنه من أجل أي x فإن : $x^2 = x$.

- البرهان :

لتكن E شبكة بول ، حسب ما مر سابقاً فإن $(E,+)$ زمرة تبديلية.

- وإذا كان الضرب معرفاً بالشكل : $x.y = x\wedge y$ (ونكتبه عادةً xy بدلاً من $x.y$)
هذه العملية تكون تبديلية وتجميعية وتحقق الخاصة الجامدية و 1 حيادي فيها.

- الضرب توزيعي على الجمع :

$$(x+y)z = [(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)]\wedge z$$
$$= (x\wedge y'\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z)$$

$$xz+yz = [(x\wedge z)\wedge(y\wedge z)']\vee[(x\wedge z)'\wedge(y\wedge z)]$$
$$= [(x\wedge z)\wedge(y'\vee z')]\vee[(x'\vee z')\wedge(y\wedge z)]$$
$$= (x\wedge z\wedge y')\vee(x\wedge z\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z)\vee(z'\wedge y\wedge z)$$
$$= (x\wedge z\wedge y')\vee(0)\vee(x'\wedge y\wedge z)\vee(0)$$
$$= (x\wedge z\wedge y')\vee(x'\wedge y\wedge z)$$

ومنه نستنتج أنه : $(x+y).z = xz+yz$

وبالتالي فإن $(E,+,.)$ هي حلقة تبديلية واحدية والجامدية محققة بالنسبة للضرب.

* الحلقة البوليانية :

تعريف : ندعو الحلقة الواحدية التي الضرب فيها جامداً (أي $x^2=x$) بحلقة بول.

نتائج :

- كل عنصر نظير نفسه :

$$(x+x)^2 = x+x \iff (x+x)(x+x) = x+x$$

$$(x+x)x+(x+x)x=x+x$$

$$x^2+x^2+x^2+x^2=x+x$$

حيادي مع حيادي الصفر ← $\underbrace{x+x}+x+x=x+x \Rightarrow x+x=0$

- الضرب تبديلي :

$$(x+y)^2=x+y$$

$$(x+y)(x+y)=x+y$$

$$(x+y)x+(x+y)y=x+y$$

$$x^2+yx+xy+y^2=x+y$$

لأن كل عنصر نظير نفسه

$$x+yx+xy+y=x+y \Rightarrow yx+xy=0 \Rightarrow yx=xy$$

* بناء شبكة بول :

- ملاحظة : كل حلقة بوليانية تكون شبكة بول حيث أن العمليتين الداخليتين :

$x \vee y = x+y+xy$ و $x \wedge y = xy$

- البرهان :

- قانون التشكيل $\wedge$ تبديلي ، تجميعي ، محقق لخاصة الجامدية .

- قانون التشكيل $\vee$ تبديلي ، لنبين أنه تجميعي :

$(x \vee y) \vee z = (x \vee y)+z+(x \vee y)z$ ، لدينا : $\forall x, y, z \in E$

حسب الفرض (العملية)

$$= x+y+xy+z+(x+y+xy)z$$

$$= x+y+xy+z+xz+yz+xyz$$

وهي عبارة متناظرة بالنسبة لـ x و y و z .

$(x \vee y) \vee z = (z \vee y) \vee x = x \vee (y \vee z) \Longrightarrow$ التجميعية محققة .

- لنبرهن أن الجامدية محققة بالنسبة لـ $\vee$:

$$x \vee x = x+x+x^2 = 0+x^2 = 0+x = x$$

- قانون الإدماج محقق :

$$x \wedge (x \vee y) = x(x+y+xy) = x^2+xy+x^2y = x+xy+xy = x+0 = x$$

نكتفي ببرهان قانون واحد لأنها متكافئة .

ومنه نستنتج أن E شبكة .

- الخاصة التوزيعية:

$x \wedge (y \vee z) = x(y + z + yz) = xy + xz + xyz$

$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = xy \vee xz = xy + xz + x^2yz = xy + xz + xyz$

- العنصر الأكبر والعنصر الأصغر: من أجل أي عنصر x يكون:

$x \wedge 0 = x.0 = 0 \Rightarrow 0 \leq x$

$x \wedge 1 = x.1 = x \Rightarrow x \leq 1$

- المتمم: لنفرض أن $x' = x + 1$ يكون:

$x \wedge x' = x.(x+1) = x^2 + x = x + x = 0$

$x \vee x' = x \vee (x+1) = x + (x+1) + x(x+1) = x + x + 1 + x^2 + x = 1$

أي أن الحلقة البوليانية هي شبكة بول.

- الشبكة والحلقة المرافقة: لتكن E شبكة بول، لنرفقها بالحلقة البوليانية $R(E)$ وذلك بتعريف العمليتين

$$x+y=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)$$
$$x.y = x\wedge y$$

لتكن B حلقة بوليانية لنرفقها بالشبكة البوليانية $L(B)$ وذلك بتعريف العمليتين:

$$x\wedge y = xy \quad , \quad x\vee y = x+y+xy$$

- مبرهنة:

$L(R(E)) = E$ (اقرأ: الشبكة L المبنية على حلقة R وحلقة مبنية على الشبكة).

- البرهان: لنرمز بـ $\dot\vee$ و $\dot\wedge$ للعمليتين في $L(R(E))$

$$x\dot\vee y = x+y+xy = x\vee y \quad , \quad x\dot\wedge y = xy = x\wedge y$$

وبالتالي نستنتج أن علاقة الترتيب هي نفسها في E و $L(R(E))$ هي نفس الشبكة.

- مبرهنة:

$$R(L(B)) = B$$

- البرهان: لنرمز بـ $\dot+$ و $\dot\times$ للعمليتين في $R(L(B))$.

$$x\dot\times y = x\wedge y = xy$$
$$x\dot+ y = (x\wedge y')\vee(x'\wedge y) = [x\wedge(y+1)]\vee[(x+1)\wedge y]$$
$$= [x(y+1)]\vee[(x+1)y] = x(y+1)+(x+1)y+xy(x+1)(y+1)$$
$$= xy+x+xy+y+x^2y^2+xy^2+x^2y+xy = x+y$$

وبأنه هاتين العمليتين هي نفس العمليتين المعرفتين على B فإن الحلقتين متطابقتان.

- نتيجة:

- يمكن أن نعرف بشكل متكافئ على المجموعة E لبناء شبكة بول $(E, \le, \wedge, \vee, 0, 1, ')$.
- لبناء حلقة بول $(E, +, ., 0, 1)$
- عندما نقول جبر بول نقصد المجموعة المعرف عليها البنائيتين السابقتين أي:

$$(E, \le, \wedge, \vee, 0, 1, ', +, .)$$

حيث أنه يمكن الانتقال من أحد البنائيتين على الأخرى بالعلاقات:

الانتقال من حلقة إلى الشبكة		الانتقال من الشبكة إلى الحلقة	
	$x\wedge y = xy$		$xy = x\wedge y$
	$x\vee y = x+y+xy$		$x+y=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)$
	$x' = x+1$		$=(x\vee y)\wedge(x'\vee y')$

- **ملاحظة:** نفرض أن $(E, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, ', +, \cdot)$ جبر بول.

1 - علاقة الترتيب $x \leq y$ يمكن التعبير عنها بأشكال مختلفة.

- بالشكل $xy = x$ (ويمكن استخدام $x \wedge y$ بدلاً من xy)
- // $x \vee y = y$
- // $x' \vee y = 1$ وذلك لأن:

$x+1+y+x+y=1$

(x, y) ن، أ

$$x' \vee y = x' + y + x'y = (x+1) + y + (x+1)y = x+1+y+xy+y$$
$$= x \vee y + 1 + y = y + 1 + y = 0 + 1 = 1$$

- بالشكل $xy' = 0$ وذلك لأن:

دمورغان

$$xy' = \overbrace{(x' \vee y)'} = 1' = 0$$

- **أمثلة على الحلقات البوليانية:**

① $P(E)$ حلقة بوليانية وذلك من أجل أي مجموعة E.

② $U = \{0, 1\}$ حلقة بوليانية وهي حالة خاصة من المثال السابق وذلك بأخذ E وحيدة العنصر. $E = \{a\} \Leftarrow P(E) = \{\emptyset, E\}$

$0 \;,\; 1$

- **حلقة قواسم عدد:**

من أجل أي عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ رمزنا سابقاً لقواسم n بالمجموعة $D(n)$ وإن $D(n)$ شبكة جزئية من $(\mathbb{N}^*, |)$ وهي أيضاً شبكة توزيعية وتحوي العنصر الأكبر n والعنصر الأصغر 1.

لنفتش عن الشرط الذي يجعل هذه الشبكة متممة، لنفرض أن $x \in D(n)$ ولنفرض أنه يوجد متمم لـ x وليكن $x' \in D(n)$ بحيث يكون: $x \wedge x' = 1 \Rightarrow \gcd(x, x') = 1$

$x \vee x' = n \Rightarrow \operatorname{lcm}(x, x') = n$

الشرط الأول يعني أن x و x' أوليان فيما بينهما وفي هذه الحالة نستنتج من الشرط الثاني $x x' = n$ (هنا يعني xx' الضرب العادي).

* الشرط اللازم والكافي كي يكون $D(n)$ متممة هو من أجل أي عنصر x من $D(n)$ يكون x و $\frac{n}{x}$ أوليان فيما بينهما.

نفرض أن x و $\frac{n}{x}$ ليسا أوليان فيما بينهما، عندئذٍ يوجد قاسم مشترك أولي بينهما مثل P ويكون $x = Pa$ و $\frac{n}{x} = Pb$ ومنه $n = Pbx$
$= P^2 ba$

P قاسم لـ $\frac{n}{x}$ $\qquad$ P قاسم لـ x

وبالتالي فإن n تقبل القسمة على مربع عدد أولي.

بالعكس، إذا كانت n تقبل القسمة على مربع عدد أولي p ليكون $n = kp^2$ ونكون عندئذٍ

$x = p$ و $\frac{n}{x} = kxp$ ومنه نستنتج أن x و $\frac{n}{x}$ ليسا أوليين فيما بينهما.
$x' = \frac{n}{x}$

ملاحظة:

الشبكة $D(n)$ المرتبة بعلاقة القسم تكون شبكة بول اذا وفقط إذا كانت n لا تقبل القسمة على أي مربع عدد أولي وهذا يعني أن $n = P_1 . P_2 . \dots . P_3$ حيث P_i أعداد أولية مختلفة.

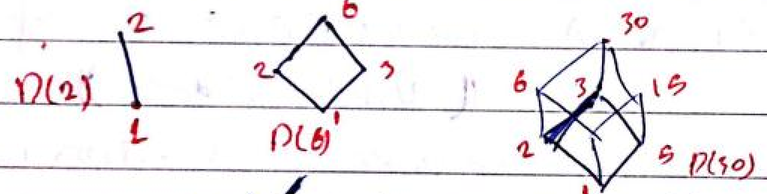
في هذه الحالة $D(n)$ تكون جبر بول مع العمليات:

$$x \wedge y = gcd(x,y)$$
$$x \vee y = Lcm(x,y)$$
$$x' = \frac{n}{x} \quad , \quad x + y = gcd(Lcm(x,y), Lcm(x',y'))$$

أمثلة:

لنفرض ثلاثة حلقات بوليانية $D(2)$ والتي هي إيزومورفية مع U و $D(6)$ ، $D(30)$

للحسب مثلاً:



لنحسب مثلاً: $5+2 = gcd(Lcm(5,2), Lcm(\frac{30}{5}, \frac{30}{2}))$ 5 و 2 أوليان فيما بينهما.
$= gcd(10,30) = 10$

حلقة المجموعات المفتوحة والمغلقة بآن واحد في فضاء طبولوجي:

في فضاء طبولوجي X ندعو clopen كل مجموعة جزئية من X والتي تكون بنفس الوقت مفتوحة ومغلقة وكل فضاء طبولوجي X يملك على الأقل مجموعتين مفتوحتين ومغلقتين بآن واحد هما $\emptyset$ و X وإذا كان الفضاء X مترابط تكونا الوحيدتين لتكن U أسرة من المجموعات المفتوحة والمغلقة بآن واحد من X فإن U تكون شبكة جزئية من $P(X)$ لأنه إذا كان $A,B \in U$ فإن $A \cap B$, $A \cup B$ تنتمي إلى U.

متمم المجموعة A في X

إن U شبكة توزيعية تملك العنصر الأكبر X والعنصر الأصغر $\emptyset$ بالإضافة إلى ذلك فإن C_X^A هو عنصر من U ومنه فإن U تكون جبر بول من أجل العمليات المجموعاتية المعروفة.

سنرى أهمية هذا المثال في الفصل التالي المتعلق بالثنوية وكمثال بسيط على هذا الجبر هو فضاء الطبولوجيا الضعيفة والقوية ويكون عندها $U = T$.

الحلقات البوليانية الجزئية :

تعريف : ليكن A جبر بول عندئذٍ ندعو حلقة بول الجزئية أو جبر بول الجزئي من A.
كل حلقة جزئية واحدية من A.

أي أن حلقة بول الجزئية هي المجموعة الجزئية B الحاوية على العنصر الحيادي 1 ومغلقة بالنسبة للعمليتين xy و $x+y$.

ومنه ينتج أن B مغلقة بالنسبة للعمليتين : $x \vee y = x+y+xy$ و x'
وتحوي العنصر (0).

إذاً B تكون جبر بول من أجل البناء المولد وحسب الملاحظات على العمليات في الفقرة السابقة يمكن أن نستنتج المبرهنة التالية.

مبرهنة : إن القضايا الثلاث الآتية متكافئة :

1- B حلقة بوليانية جزئية من A.

2- B هي مجموعة جزئية غير خالية من A ومغلقة بالنسبة للعمليتين xy و x'.

3- B هي مجموعة جزئية غير خالية من A ومغلقة بالنسبة للعمليتين $x \vee y$ و x'.

((سنستخدم الشكل ②))

ملاحظات :

1- الحلقة البوليانية الجزئية B من A والمزودة بالترتيب المولد تكون شبكة جزئية من A، لكن ليس كل شبكة جزئية من A تكون بالضرورة حلقة بوليانية جزئية.

أمثلة :

① لتكن E مجموعة غير منتهية إن أسرة المجموعات الجزئية المنتهية من E تكون شبكة جزئية من $P(E)$ ولكنها ليست حلقة بوليانية جزئية لأنها لا تحوي العنصر المحايد E من أجل الترتيب المولد تكون هذه الشبكة توزيعية ولكنها ليست متممة.
(وهي لا تحوي العنصر الأكبر) وهو E.

② تكون شبكة جزئية من $D(30)$ ولكنها ليست شبكة بوليانية جزئية من $D(30)$ وذلك لأنها لا تحوي العنصر المحايد 30 ونلاحظ أن الترتيب المولد على $D(6)$ يشكل شبكة بول ولكن حيث 6 هو العنصر المحايد. بالمقابل $\{1, 2, 15, 30\}$ هي حلقة بوليانية من $D(30)$.

2- في أي حلقة بوليانية A توجد حلقتين بوليانيتين جزئيتين هما $T=\{0,1\}$ و A نفسها.

3] تقاطع أي أسرة $(B_i)_{i\in I}$ من الحلقات البوليانية الجزئية من A يكون حلقة بوليانية من A (البرهان بسيط).

- أمثلة:

① الأسرة $FC(E)$ من المجموعات الجزئية المنتهية أو ذات المتممات المنتهية من مجموعة E تكون حلقة بوليانية جزئية من $P(E)$ وبشكل عام إذا كانت E غير منتهية بحيث أن $\text{Card}\,E=\alpha$ وإذا كانت $\beta<\alpha$ فإن أسرة المجموعات الجزئية A التي تحقق المتراجحة $\text{Card}\,A<\beta$ و $\text{Card}\,C_A<\beta$ تكون حلقة بوليانية جزئية من $P(E)$.

② الأسرة $\mathcal{U}$ من المجموعات المفتوحة والمغلقة بآن واحد في فضاء طبولوجي X، تكون حلقة بوليانية جزئية من $P(X)$ بينما الأسرة $\mathcal{T}$ من المجموعات المفتوحة في X تكون شبكة جزئية تحوي العنصر المحايد X ولكنها في الحالة العامة ليست حلقة بوليانية جزئية وذلك لأنها ليست مغلقة (مفتوحة بالنسبة إلى متمم).

- المورفيزم البولياني:

لتكن الحلقتين البوليانيتين A و B ندعو التطبيق f من A في B بالمورفيزم البولياني (أو مورفيزم إذا لم يكن هناك من غموض) إذا كان f مورفيزم أحادي للحلقة أي أن:

$$\forall x,y\in A\ ;\ f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(xy)=f(x).f(y)$$
$$f(1)=1$$

حسب الملاحظات السابقة نستنتج أن المورفيزم البولياني يحافظ على جميع العمليات في جبر بول أي أن:

$$f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)$$
$$f(x')=(f(x))' \quad , \quad f(0)=0$$

- مبرهنة: إذا كان A و B جبري بول و f تطبيق من A في B فإن القضايا التالية متكافئة:

① f مورفيزم بولياني.

② من أجل أي عنصر $x,y\in A$ فإن $f(xy)=f(x)f(y)$ و $f(x')=(f(x))'$

③ من أجل أي عنصر $x,y\in A$ فإن $f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)$ و $f(x')=(f(x))'$

- البرهان:

① ⇐ ②: $f(x')=f(x+1)=f(x)+f(1)=f(x)+(1)=(f(x))'$

كما أن $f(xy)=f(x).f(y)$ محققة من الفرض.

(2) ⇐ (3):

$f(x\vee y)=f(x'y')'=(f(x'y'))'$

$=(f(x').f(y'))'$

هومورفزم يحافظ على المتمم $=(f(x'))'\vee(f(y'))'=f(x)\vee f(y)$

$\forall x,y\in A\Rightarrow x',y'\in A$

(3) ⇐ (1):

$f(xy)=f(x'\vee y')'=(f(x'\vee y'))'=(f(x')\vee f(y'))'$

صورة متمم يساوي متمم صورة $=f(x).f(y)$ هومورفزم

$f(x+y)=f[(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)]=f(x\wedge y')\vee f(x'\wedge y)$

$=f(xy')\vee f(x'y)$

$=[f(x).f(y')]\vee[f(x').f(y)]$

$=[f(x)\wedge(f(y))']\vee[(f(x))'\wedge f(y)]$

$=f(x)+f(y)$

$f(1)=f(x\vee x')=f(x)\vee f(x')=f(x)\vee(f(x))'=1$

أي أن f هومورفزم بولياني.

- أمثلة:

- اذا كانت B حلقة بوليانية جزئية من الحلقة A فإن الإدخال القانوني من B في A حيث $i(x)=x$ من أجل أي x من B يكون هومورفزم بولياني.
- كذلك خاصة التطبيق المطابق I_A من A في A يكون هومورفزم بولياني.
- اذا كانت $A=\wp(E)$ وكان x عنصراً ثابتاً في E فإن التطبيق f من A في U المعرف بالشكل

$$f(X)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in X\\ 0 & \text{if } x\notin X\end{cases}$$

يكون هومورفزم بولياني.

- الحل:

$\forall X,Y\in A,\ f(X\cap Y)=1$ if $x\in X\cap Y$

0 if $x\notin X\cap Y$

اذا كان $x\in X\cap Y\Leftarrow x\in X,\ x\in Y\Leftarrow f(X)=1,\ f(Y)=1$

$\Rightarrow f(X).f(Y)=1.1=1$

في هذه الحالة $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$

Alfares

إذا كان $x_0 \notin X \cap Y$

$f(X).f(Y)=0 \Leftarrow x_0 \in X ,\ x_0 \notin Y$

$f(X).f(Y)=0 \Leftarrow x_0 \notin X ,\ x_0 \in Y$

$f(X).f(Y)=0 \Leftarrow x_0 \notin X ,\ x_0 \notin Y$

في هذه الحالة يكون $f(X \cap Y)=0=f(X).f(Y)$

أي أنه في جميع الأحوال $f(X \cap Y)=f(X).f(Y)$

$$f(X') = \begin{cases} 1 & \text{if } x_0 \in X' \Rightarrow x_0 \notin X \Rightarrow f(X)=0 \Rightarrow (f(X))'=1 \quad (*) \\ 0 & \text{if } x_0 \notin X' \Rightarrow x_0 \in X \Rightarrow f(X)=1 \Rightarrow (f(X))'=0 \quad (*') \end{cases}$$

من $(*) \Leftarrow f(X')=(f(X))'$

من $(*') \Leftarrow f(X')=(f(X))'$

ومنه نستنتج أن f هو (هومومورفيزم بولياني).